**[21-BA328/21-BS332]**

**AT THE END OF THIRD SEMESTER (CBCS PATTERN) EXAMINATION**

**MATHEMATICS - III - ABSTRACT ALGEBRA**

***(COMMON FOR B.A, B.Sc.)***

**UG PROGRAM ( 4 YEARS HONORS)**

***(w.e.f. Admitted Batch 2020-21)***

**Time : 3 Hours** **Maximum : 75 Marks**

## SECTION - A

**విభాగము - ఎ**

Answer any **Five** questions. Each question carries **Five** marks. **(5×5=25)**

ఏవేని **ఐదింటికి** సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు **ఐదు** మార్కులు.

1. Show that the set $Q_+$ of all rational numbers forms $(Q_+, 0)$ an abelian group under the composition defined by o such that $aob = \frac{ab}{3}$ for $a, b \in Q_+$.

ధన అకరణీయ సంఖ్యాసమితి $Q_+$ పై 'o' పరిక్రియ $a, b \in Q_+$ కు $aob = \frac{ab}{3}$ గా నిర్వచింపబడిన $(Q_+, 0)$ ఒక ఎబీలియన్ సమూహము అని చూపండి.

17000 [Turn over

2. Prove that if a is an element of a group G such that $0(a) = n$, then $a^m = e$ iff n/m.

సమూహము G లో మూలకము యొక్క తరగతి n i,e; $0(a) = n$, అపుడు $a^m = e \Leftrightarrow$ n/m అని నిరూపించండి.

3. Prove that the union of two sub groups of a group is a subgroup iff one is contained in the other.

ఒక సమూహములో రెండు ఉపసమూహాల సమ్మేలనము ఆసమూహములో ఉపసమూహము కావడానికి అవశ్యక పర్యాప్త నియమము ఒకటి ఇంకొక దానిలో ఉపసమితి అని చూపండి.

4. Prove that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal sub group.

ఒక సమూహములో రెండు అభిలంబ ఉపసమూహాచ్ఛేదనము ఒక అభిలంబ ఉపసమూహమగునని చూపండి.

5. Find the regular permutation group isomorphic to the multiplication group $\{1,-1,i,-i\}$.

గుణన సమూహము $\{1,-1,i,-i\}$ కు తుల్యరూపత కలిగిన క్రమసౌష్ఠ సమూహము కనుక్కోండి.

6. Let G be a group and N be a normal sub group G. Let f be a mapping from G to G/N defined by $f(x) = Nx$ for $x \in G$. Then prove that f is a homomorphism from onto G/N and ker f = N.

G ఒక సమూహము, N దానిలో అభిలంబ ఉపసమూహము అనుకొనుము. G నుండి G/N కు f ప్రమేయము $f(x) = Nx$, $x \in G$ అని నిర్వచింపబడినది. అపుడు G నుండి G/N కు f సంగ్రస్త సమరూపత మరియు కెర్నెల్ ker f = N అగునని చూపండి.

7. Prove that a field has no zero divisors.

క్షేత్రంలో శూన్య భాజకాలు లేవని నిరూపించండి.

8. Define characteristic of a ring R. If $a^2 = a\ \forall a \in R$, R is a non zero ring then prove that the characteristic of R is 2.

వలయం R యొక్క లాక్షణికతను నిర్వచింపుము. R శూన్యేతరవలయము మరియు $a^2 = a\ \forall a \in R$ అయితే R యొక్క లాక్షణికత 2 అని చూపండి.

[Turn over

## SECTION - B

## విభాగము - బి

**Answer all the questions. Each question** carries **Ten marks.** **(5×10=50)**

ఈ క్రింది ప్రశ్నలన్నింటికి సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు పది మార్కులు.

9. a) **Prove that the set of matrices** $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ $\alpha \in R$ **forms a** group w.r.t **matrix multiplication if** $\cos\theta = \cos\phi \Rightarrow \theta = \phi$.

మాత్రికల సమితి $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ $\alpha \in R$ మాత్రికా గుణకారము దృష్ట్యా $\cos\theta = \cos\phi \Rightarrow \theta = \phi$ అయినపుడు ఒక సమూహము అని చూపండి.

(OR/లేదా)

b) Prove that the order of every element of a finite group is finite and is less than or equal to the order of the group.

పరిమిత సమూహములో ప్రతి మూలకపు తరగతి పరిమితము మరియు అది సమూహపు తరగతి కంటే తక్కువగాని సమానము గాని అగునని చూపండి.

10. a) Prove that the necessary and sufficient condition for a finite complex H of a group G to be a subgroup of G is $a,b \in H \Rightarrow ab \in H$ .

ఒక సమూహము G లో పరిమిత కాంప్లెక్స్ H, G లో ఉపసమూహముగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a,b \in H \Rightarrow ab \in H$ అని చూపండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Lagranges - theorem.

లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

11. a) Prove that if H is a sub group of G and N is a normal subgroup of G, then (i) $H \cap N$ is a normal subgroup of H (ii) N is a normal sub group of HN.

సమూహము G లో H ఒక ఉపసమూహము మరియు N అభిలంబ ఉపసమూహము అయితే (i) H లో $H \cap N$ అనేది ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము (ii) HN లో N ఒక అభిలంబ ఉపసమూహమని చూపండి.

(OR/లేదా)

[Turn over

b) Define normal subgroup. Prove that a subgroup H of a group G is a normal sub group of G iff each left coset of H in G is a right coset of H in G.

అభిలంబ ఉపసమూహాన్ని నిర్వచించండి. G లో H అభిలంబ ఉపసమూహం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము G లో H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహసమితి కుడి సహసమితి అవుతుందని చూపండి.

12. a) Prove that the necessary and sufficient condition for a homomorphism f of a group G onto a group G' with kernel K to be an isomorphism of G into G' is that $K = \{e\}$.

సమూహము $f$ నుండి సమూహము G' కు నిర్వచింపబడిన సంగ్రస్త సమరూపత G నుండి G' కు తుల్యరూపత అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $K = \{e\}$ అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Cayley's theorem.

కేలే సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

13. a) Prove that every finite integral domain is a field.

ప్రతి పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశం క్షేత్రమవుతుందని చూపండి.

(OR/లేదా)

b) Define a subring. Let $S_1$, $S_2$ be two subrings of a ring R, prove that $S_1 \cup S_2$ is a subring of R iff either $S_1 \subseteq S_2$ or $S_2 \subseteq S_1$.

ఉపవలయాన్ని నిర్వచించండి. R వలయానికి $S_1$, $S_2$లు రెండు ఉపవలయాలైతే $S_1 \cup S_2$ కూడా R కు ఉపవలయం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $S_1 \subseteq S_2$ లేదా $S_2 \subseteq S_1$ అని నిరూపించండి.